一元八次方程求根公式（天珩公式）
標準型：(係數$\in$R 且 $a\neq0$)

$ax^8+bx^7+cx^6+dx^5+ex^4+fx^3+gx^2+hx+j=0$

重根判別式：

$$\begin{cases}G=7b^2-16ac\\H=7b^3-24abc+32a^2d\\J=15b^2c-100abd+256a^2e\\K=b^3c-8ab^2d+32a^2be-64a^3f\\L=5b^3d-72ab^2e+528a^2bf-2048a^3g\\M=b^4d-16ab^3e+144a^2b^2f-896a^3bg+3584a^4h\\N=b^4e-28ab^3f+464a^2b^2g-5952a^3bh+65536a^4j\end{cases}$$

$$\begin{cases}D=3G^2-10bH-8aJ\\E=G^3+bGH-4aGJ+16a^2L\\F=3G^4-2b^5H+16a^2J^2-16aG^2J+62ab^3K+32a^2GL-152a^2bM-64a^3N\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=D^2-3F\\B=DF-9E^2\\C=F^2-3DE^2\end{cases}$$

$$(*)\begin{cases}P=GH+b^2H-16aK\\Q=E+8H^2-4b^3H+44abK\\R=14G^2H+105bH^2+3b^4H-56aHJ-96ab^2K+256a^2M\\S=8EG-4F-9bDH+bG^2H\end{cases}$$

總判別式：$\Delta=B^2-4AC$

①當 G=H=J=K=L=M=N=0 時，方程有一個八重實根。

公式 1: $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=-\frac{b}{8a}=-\frac{2c}{7b}=-\frac{d}{2c}=-\frac{4e}{5d}=-\frac{5f}{4e}=-\frac{2g}{f}=-\frac{7h}{2g}=-\frac{8j}{h}$

②當 H=K=M=D=E=F=0 時，方程有兩個四重根。

(1)若$7b^2>16ac$，方程有八個實根。

公式 2: $x_{1,2}=x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{7b^2-16ac}}{8a}$

(2)若$7b^2<16ac$，方程有八個虛根。

公式 3: $x_{1,2}=x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{16ac-7b^2}}{8a}i$

③當 DEF≠0，H=K=M=A=B=C=0 時，方程有兩個三重根。

(1)若$D^2G<\min\{-9DE,3DE\}$，方程有八個虛根。

公式 4: $x_{1,2}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-D^2G-9DE}}{8aD}i\quad x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-D^2G+3DE}}{8aD}i$

(2)若$-9DE\leq D^2G<3DE$，方程有兩個實根和六個虛根。

公式 5: $x_{1,2}=\frac{-bD\pm\sqrt{D^2G+9DE}}{8aD}\quad x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-D^2G+3DE}}{8aD}i$

(3)若$3DE\le D^2G<-9DE$，方程有六個實根和兩個虛根。

公式 6: $x_{1,2}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-D^2G-9DE}}{8aD}i\quad x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-bD\pm\sqrt{D^2G-3DE}}{8aD}$

(4)若$D^2G\ge\max\{-9DE,3DE\}$，方程有八個實根。

公式 7: $x_{1,2}=\frac{-bD\pm\sqrt{D^2G+9DE}}{8aD}\quad x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-bD\pm\sqrt{D^2G-3DE}}{8aD}$

④當 D≠0，H=K=M=E=F=0 時，方程有四個二重根。

(1)若 D>0 且$G<-\sqrt{D}$，方程有八個虛根。

公式 8: $x_{1,2}=x_{3,4}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-G+\sqrt{D}}}{8a}i\quad x_{5,6}=x_{7,8}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-G-\sqrt{D}}}{8a}i$

(2)若 D>0 且$-\sqrt{D}\le G<\sqrt{D}$，方程有四個實根和四個虛根。

公式 9: $x_{1,2}=x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{D}}}{8a}\quad x_{5,6}=x_{7,8}=-\frac{b}{8a}\pm\frac{\sqrt{-G+\sqrt{D}}}{8a}i$

(3)若 D>0 且$G\ge\sqrt{D}$，方程有八個實根。

公式 10: $x_{1,2}=x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{D}}}{8a}\quad x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{G-\sqrt{D}}}{8a}$

(4)若 D<0，方程有八個虛根。

公式 11: $x_{1,2}=x_{3,4}=\frac{-2b+\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D}}}{16a}i$

$$x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-2b-\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D}}}{16a}i$$

⑤當 ABC≠0，H=K=M=Δ=0 時，方程有兩個二重根。

(1)若 AB>0。

公式 12: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{G+2AE/B+\sqrt{2B/A}}}{8a}\quad x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G+2AE/B-\sqrt{2B/A}}}{8a}$

$$x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{G-2AE/B}}{8a}$$

(2)若 AB<0，方程有至少四個虛根。

公式 13: $x_{1,2}=\frac{-2b+\sqrt{2G+4AE/B+2\sqrt{G^2+D+4AEG/B-3B/A}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G-4AE/B+2\sqrt{G^2+D+4AEG/B-3B/A}}}{16a}i$

$$x_{3,4}=\frac{-2b-\sqrt{2G+4AE/B+2\sqrt{G^2+D+4AEG/B-3B/A}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G-4AE/B+2\sqrt{G^2+D+4AEG/B-3B/A}}}{16a}i$$

$$x_{5,6}=x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{G-2AE/B}}{8a}$$

⑥當Δ>0，H=K=M=0 時，方程有至少四個虛根。

$$z_{1,2}=AD+3\cdot\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2}\quad z=D^2-D(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})+(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})^2-3A$$

$$y=\frac{4aJ+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}+\sqrt{z}-G\mathrm{sgn}(E)\sqrt{3D+3(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})}}{6}\quad y_{1,2}=\sqrt{y}\pm\frac{3G-\mathrm{sgn}(E)\sqrt{3D+3(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})}}{6}$$

公式 14: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\mathrm{sgn}(E)\sqrt{(D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})/3}+\sqrt{(2D-\sqrt[3]{z_1}-\sqrt[3]{z_2}+2\sqrt{z})/3}}}{8a}$

$$x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\mathrm{sgn}(E)\sqrt{(D+\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2})/3}-\sqrt{(2D-\sqrt[3]{z_1}-\sqrt[3]{z_2}+2\sqrt{z})/3}}}{8a}$$

$$x_{5,6}=\frac{-b+\sqrt{y_1}}{8a}\pm\frac{\sqrt{y_2}}{8a}i\quad x_{7,8}=\frac{-b-\sqrt{y_1}}{8a}\pm\frac{\sqrt{y_2}}{8a}i$$

⑦當 $\Delta<0$，H=K=M=0 時。

$$\theta=\arccos\frac{3B-2AD}{2A\sqrt{A}}\quad y_{1,2}=\frac{D+\sqrt{A}(\cos\frac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})}{3}\quad y_3=\frac{D-2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3}$$

(1)若 E=0 且 D>0 且 F>0。

公式 15: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{D+2\sqrt{F}}}}{8a}\quad x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{D-2\sqrt{F}}}}{8a}$

$$x_{5,6}=\frac{-b\pm\sqrt{G-\sqrt{D+2\sqrt{F}}}}{8a}\quad x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{G-\sqrt{D-2\sqrt{F}}}}{8a}$$

(2)若 E=0 且 D<0 且 F>0，方程有八個虛根。

公式 16: $x_{1,2}=\frac{-2b+\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D+2\sqrt{F}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D+2\sqrt{F}}}}{16a}i$

$$x_{3,4}=\frac{-2b+\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D-2\sqrt{F}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D-2\sqrt{F}}}}{16a}i$$

$$x_{5,6}=\frac{-2b-\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D+2\sqrt{F}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D+2\sqrt{F}}}}{16a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-2b-\sqrt{2G+2\sqrt{G^2-D-2\sqrt{F}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2-D-2\sqrt{F}}}}{16a}i$$

(3)若 E=0 且 F<0，方程有八個虛根。

公式 17: $x_{1,2}=\frac{-2b+\sqrt{2G+\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2+G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}$

$$\pm\frac{\sqrt{-2G-\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2+G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}i$$

$$x_{3,4}=\frac{-2b-\sqrt{2G+\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2+G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\sqrt{-2G-\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2+G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}i$$

$$x_{5,6}=\frac{-2b+\sqrt{2G-\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2-G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\sqrt{-2G+\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2-G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-2b-\sqrt{2G-\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2-G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\sqrt{-2G+\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+2\sqrt{G^2-G\sqrt{2D+2\sqrt{A-F}}+\sqrt{A-F}}}}{16a}i$$

(4)若 E≠0 且 D>0 且 F>0。

公式 18: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\mathrm{sgn}(E)\sqrt{y_3}}}{8a}$ $x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{G-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\mathrm{sgn}(E)\sqrt{y_3}}}{8a}$

$x_{5,6}=\frac{-b\pm\sqrt{G+\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\mathrm{sgn}(E)\sqrt{y_3}}}{8a}$ $x_{7,8}=\frac{-b\pm\sqrt{G-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\mathrm{sgn}(E)\sqrt{y_3}}}{8a}$

(5)若 E≠0 且$\min\{D,F\}\le 0$，方程有八個虛根。

公式 19: $$x_{1,2}=\frac{-2b+\sqrt{2G+2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2+2G\sqrt{y_1}+2y_1-D-2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G-2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2+2G\sqrt{y_1}+2y_1-D-2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}i$$

$$x_{3,4}=\frac{-2b-\sqrt{2G+2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2+2G\sqrt{y_1}+2y_1-D-2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G-2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2+2G\sqrt{y_1}+2y_1-D-2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}i$$

$$x_{5,6}=\frac{-2b+\sqrt{2G-2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2-2G\sqrt{y_1}+2y_1-D+2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2-2G\sqrt{y_1}+2y_1-D+2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-2b-\sqrt{2G-2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2-2G\sqrt{y_1}+2y_1-D+2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}\pm\frac{\sqrt{-2G+2\sqrt{y_1}+2\sqrt{G^2-2G\sqrt{y_1}+2y_1-D+2E/\sqrt{y_1}}}}{16a}i$$

⑧當 H≠0，P=Q=R=0，S>0 時，方程有八個虛根。

$y_1=5G^2+45bH-24aJ$ $z_1=19G^3+135bGH-108H^2-72aGJ$

$$y_2=-z_1+\sqrt{\frac{y_1^3+z_1^2-27S(y_1+3G^2)+\sqrt{\left(y_1^3+z_1^2-27S(y_1+3G^2)\right)^2+81S\left(y_1^2+2Gz_1-3S\right)^2}}{2}}$$

$$z_2=-9G\sqrt{S}+\mathrm{sgn}(y_1^2+2Gz_1-3S)\sqrt{\frac{27S(y_1+3G^2)-y_1^3-z_1^2+\sqrt{\left(y_1^3+z_1^2-27S(y_1+3G^2)\right)^2+81S\left(y_1^2+2Gz_1-3S\right)^2}}{2}}$$

$\theta=\arccos\frac{y_2}{\sqrt{{y_2}^2+{z_2}^2}}$ $y_3=\frac{-4G+\sqrt[6]{{y_2}^2+{z_2}^2}\cos\frac{\theta}{3}}{3}-\frac{y_1\cos\frac{\theta}{3}+3\,\mathrm{sgn}(z_2)\sqrt{S}\sin\frac{\theta}{3}}{3\sqrt[6]{{y_2}^2+{z_2}^2}}$

$$z_3=\frac{\mathrm{sgn}(z_2)\sqrt[6]{{y_2}^2+{z_2}^2}\sin\frac{\theta}{3}}{3}-\frac{3\sqrt{S}\cos\frac{\theta}{3}-\mathrm{sgn}(z_2)y_1\sin\frac{\theta}{3}}{3\sqrt[6]{{y_2}^2+{z_2}^2}}$$

$$y_4=\frac{H\sqrt{y_3+2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}}{\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}\quad z_4=\frac{\mathrm{sgn}(z_3)H\sqrt{-y_3-2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}}{\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}$$

公式 20：$x_{1,2}=\frac{-2b-\sqrt{y_3+2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}+\sqrt{-y_3+4y_4+\sqrt{(y_3-4y_4)^2+(z_3+4z_4)^2}}}{16a}$

$$\pm\frac{\mathrm{sgn}(z_3)\sqrt{-y_3-2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}+\mathrm{sgn}(z_3+4z_4)\sqrt{y_3-4y_4+\sqrt{(y_3-4y_4)^2+(z_3+4z_4)^2}}}{16a}i$$

$$x_{3,4}=\frac{-2b-\sqrt{y_3+2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}-\sqrt{-y_3+4y_4+\sqrt{(y_3-4y_4)^2+(z_3+4z_4)^2}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\mathrm{sgn}(z_3)\sqrt{-y_3-2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}-\mathrm{sgn}(z_3+4z_4)\sqrt{y_3-4y_4+\sqrt{(y_3-4y_4)^2+(z_3+4z_4)^2}}}{16a}i$$

$$x_{5,6}=\frac{-2b+\sqrt{y_3+2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}+\sqrt{-y_3-4y_4+\sqrt{(y_3+4y_4)^2+(z_3-4z_4)^2}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\mathrm{sgn}(z_3)\sqrt{-y_3-2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}-\mathrm{sgn}(z_3-4z_4)\sqrt{y_3+4y_4+\sqrt{(y_3+4y_4)^2+(z_3-4z_4)^2}}}{16a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-2b+\sqrt{y_3+2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}-\sqrt{-y_3-4y_4+\sqrt{(y_3+4y_4)^2+(z_3-4z_4)^2}}}{16a}$$

$$\pm\frac{\mathrm{sgn}(z_3)\sqrt{-y_3-2G+\sqrt{(y_3+2G)^2+{z_3}^2}}+\mathrm{sgn}(z_3-4z_4)\sqrt{y_3+4y_4+\sqrt{(y_3+4y_4)^2+(z_3-4z_4)^2}}}{16a}i$$