一元十次方程求根公式（天珩公式）

標準型：(係數∈R 且 a≠0)

$$ax^{10}+bx^9+cx^8+dx^7+ex^6+fx^5+gx^4+hx^3+jx^2+kx+l=0$$

重根判別式：

$$\begin{cases} E=9b^2-20ac \\ F=6b^3-20abc+25a^2d \\ G=28b^2c-175abd+400a^2e \\ H=14b^3c-105ab^2d+375a^2be-625a^3f \\ J=28b^4c-245ab^3d+1200a^2b^2e-4000a^3bf+8000a^4g \\ K=2b^5c-20ab^4d+125a^2b^3e-625a^3b^2f+2500a^4bg-6250a^5h \\ L=7b^5d-130ab^4e+1450a^2b^3f-12200a^3b^2g+78500a^4bh-320000a^5j \\ M=b^6d-20ab^5e+250a^2b^4f-2500a^3b^3g+21250a^4b^2h-150000a^5bj+750000a^6k \\ N=3b^6e-100ab^5f+2050a^2b^4g-33625a^3b^3h+485000a^4b^2j-6425000a^5bk+80000000a^6l \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=2E^2-5aG \\ B=4E^3-15aEG-25aJ \\ C=14E^4+50a^2G^2-70aE^2G-100aEJ+125a^2L \\ D=-8E^5+50aE^3G+250aE^2J-625a^2EL+250a^3N \end{cases}$$

$$(*)\{P=8B^4+C^3+2BCD$$

總判別式：$\Delta=D^2-16A^5$

①當 E=F=G=H=J=K=L=M=N=0 時，方程有一個十重實根。

公式 1: $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=x_9=x_{10}=-\frac{b}{10a}=-\frac{2c}{9b}=-\frac{3d}{8c}=-\frac{4e}{7d}=-\frac{5f}{6e}=-\frac{6g}{5f}=-\frac{7h}{4g}=-\frac{8j}{3h}=-\frac{9k}{2j}=-\frac{10l}{k}$

②當 F=H=K=M=A=B=C=D=0 時，方程有兩個五重根。

(1)若 $9b^2>20ac$，方程有十個實根。

公式 2: $x_{1,2}=x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=x_{9,10}=\frac{-b\pm\sqrt{9b^2-20ac}}{10a}$

(2)若 $9b^2<20ac$，方程有十個虛根。

公式 3: $x_{1,2}=x_{3,4}=x_{5,6}=x_{7,8}=x_{9,10}=-\frac{b}{10a}\pm\frac{\sqrt{20ac-9b^2}}{10a}i$

③當 AD≠0，F=H=K=M=B=C=Δ=0 時，方程有四個二重根。

公式 4: $x_{1,2}=\frac{-2Ab\pm\sqrt{4A^2E-2D}}{20aA}$

$$x_{3,4}=x_{5,6}=\frac{-4Ab\pm\sqrt{2D+8A^2\left(2E+\sqrt{5A}\right)}}{40aA}$$

$$x_{7,8}=x_{9,10}=\frac{-4Ab\pm\sqrt{2D+8A^2\left(2E-\sqrt{5A}\right)}}{40aA}$$

④當 Δ>0，F=H=K=M=B=C=0 時，方程有至少八個虛根。

$z_{1,2} = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 16A^5}}{4} \quad y_{1,2} = E^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} E(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2}) + (\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})^2 - \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} A$

公式 5：$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{E - (\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})}}{10a}$

$$x_{3,4} = \frac{-2b + \sqrt{2E + (1-\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_1}}}{20a} \pm \frac{\sqrt{-2E - (1-\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_1}}}{20a} i$$

$$x_{5,6} = \frac{-2b - \sqrt{2E + (1-\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_1}}}{20a} \pm \frac{\sqrt{-2E - (1-\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_1}}}{20a} i$$

$$x_{7,8} = \frac{-2b + \sqrt{2E + (1+\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_2}}}{20a} \pm \frac{\sqrt{-2E - (1+\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_2}}}{20a} i$$

$$x_{9,10} = \frac{-2b - \sqrt{2E + (1+\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_2}}}{20a} \pm \frac{\sqrt{-2E - (1+\sqrt{5})(\sqrt[5]{z_1} + \sqrt[5]{z_2})/2 + 2\sqrt{y_2}}}{20a} i$$

⑤當 Δ<0，F=H=K=M=B=C=0 時。

$\theta = \arccos \frac{D}{4A^2\sqrt{A}}$

公式 6：$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{E - 2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{5}}}{10a}$

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{E + \sqrt{A}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\frac{\theta}{5} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\sin\frac{\theta}{5})}}{10a} \quad x_{5,6} = \frac{-b \pm \sqrt{E + \sqrt{A}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cos\frac{\theta}{5} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\sin\frac{\theta}{5})}}{10a}$$

$$x_{7,8} = \frac{-b \pm \sqrt{E + \sqrt{A}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cos\frac{\theta}{5} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\sin\frac{\theta}{5})}}{10a} \quad x_{9,10} = \frac{-b \pm \sqrt{E + \sqrt{A}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cos\frac{\theta}{5} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\sin\frac{\theta}{5})}}{10a}$$

⑥當 H≠0，E=F=G=J=K=L=M=0 時。

(1)若$256H^2 \geq 5aN$，方程有兩個實根和八個虛根。

公式 7：$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt[5]{5a(16H \pm \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{10a}$

$$x_{3,4} = \frac{-4b - (1+\sqrt{5})\sqrt[5]{5a(16H + \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt[5]{5a(16H + \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} i$$

$$x_{5,6} = \frac{-4b - (1+\sqrt{5})\sqrt[5]{5a(16H - \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt[5]{5a(16H - \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} i$$

$$x_{7,8} = \frac{-4b - (1-\sqrt{5})\sqrt[5]{5a(16H + \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt[5]{5a(16H + \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} i$$

$$x_{9,10} = \frac{-4b - (1-\sqrt{5})\sqrt[5]{5a(16H - \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt[5]{5a(16H - \sqrt{256H^2 - 5aN})}}{40a} i$$

(2)若$256H^2 < 5aN$，方程有十個虛根。

$\theta = \arccos \frac{16H}{\sqrt{5aN}}$

公式 8：$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\cos\frac{\theta}{5}}{10a} \pm \frac{\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\sin\frac{\theta}{5}}{10a} i$

$$x_{3,4} = \frac{-b + \sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\cos\frac{\theta+2\pi}{5}}{10a} \pm \frac{\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\sin\frac{\theta+2\pi}{5}}{10a} i$$

$$x_{5,6}=\frac{-b+\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\cos\frac{\theta-2\pi}{5}}{10a}\pm\frac{\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\sin\frac{\theta-2\pi}{5}}{10a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-b+\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\cos\frac{\theta+4\pi}{5}}{10a}\pm\frac{\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\sin\frac{\theta+4\pi}{5}}{10a}i$$

$$x_{9,10}=\frac{-b+\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\cos\frac{\theta-4\pi}{5}}{10a}\pm\frac{\sqrt[5]{5a}\sqrt[10]{5aN}\sin\frac{\theta-4\pi}{5}}{10a}i$$

⑦當 BC≠0，F=H=K=M=A=P=0 時，方程有至少八個虛根。

$$y_{1,2}=E^2-E\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}\right)+\left(\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}\right)^2-\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{B^2C}{2}}$$

公式 9：$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{E+\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}}}{10a}$

$$x_{3,4}=\frac{-2b+\sqrt{2E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_1}}}{20a}\pm\frac{\sqrt{-2E+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_1}}}{20a}i$$

$$x_{5,6}=\frac{-2b-\sqrt{2E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_1}}}{20a}\pm\frac{\sqrt{-2E+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_1}}}{20a}i$$

$$x_{7,8}=\frac{-2b+\sqrt{2E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_2}}}{20a}\pm\frac{\sqrt{-2E+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_2}}}{20a}i$$

$$x_{9,10}=\frac{-2b-\sqrt{2E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_2}}}{20a}\pm\frac{\sqrt{-2E+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{C^2}{4B}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{2B^3}{C}}+2\sqrt{y_2}}}{20a}i$$